

SINTESI DI TESI

LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Candidato: Francesco Viganò

ALGANT (ALGEBRA, GEOMETRY AND NUMBER THEORY)
MASTER DOUBLE-DEGREE PROGRAM (<http://algant.eu>)

- Primo anno: *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano*
- Secondo anno: *Département de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay*

ADVISOR: PROFESSOR FRANÇOIS CHARLES¹

Il lavoro svolto per questa tesi di Laurea Magistrale in Matematica è focalizzato in gran parte sull'articolo *Complex multiplication in twistor spaces* [Huy19] del Professor Daniel Huybrechts². L'obiettivo iniziale proposto al candidato dal relatore Professor François Charles era duplice: una piena comprensione dell'articolo di Huybrechts e un tentativo di miglioramento dei risultati da lui presentati. Durante i mesi di lavoro sono state poste svariate domande, sia da parte del candidato che da parte del relatore, alcune delle quali ancora non hanno trovato risposta (si veda la Sezione 4 per i problemi aperti). Ciononostante, il candidato ha saputo da un lato proporre dei risultati di perfezionamento di alcune situazioni illustrate da Huybrechts, dall'altro introdurre due azioni in grado di mettere in luce ulteriori proprietà dell'oggetto di interesse del problema: il twistor space di una superficie K3. I **nuovi risultati proposti dal candidato** sono qui riassunti molto schematicamente (si veda la Sezione 3 per una discussione approfondita):

- Per una superficie K3 X di tipo CM, si prova che gli unici tre valori possibili del Picard number $\rho(\mathcal{X}_\zeta)$ delle fibre \mathcal{X}_ζ del corrispondente twistor space \mathcal{X} sono: $\rho(X) - 1$, per la generica fibra; $\rho(X)$, per fibre speciali al di fuori dell'equatore; $10 + \frac{\rho(X)}{2}$, per fibre speciali sull'equatore. I punti corrispondenti a fibre speciali vengono detti di Picard jump.
- Indichiamo con K_T il campo $\text{End}_{\text{Hdg}}(T(X))$, dove $T(X)$ è il transcendental lattice di una superficie K3 proiettiva X . Viene introdotta un'azione del gruppo moltiplicativo K_T^\times sui punti di Picard jump (polo nord escluso) della semi-sfera superiore parametrizzante le fibre del twistor space \mathcal{X} . Grazie a quest'azione, per X di tipo CM, si prova l'esistenza di un omeomorfismo tra K_T^\times e tali punti di Picard jump. Si prova inoltre che fibre algebriche \mathcal{X}_ζ corrispondenti a punti ζ alla stessa altezza sulla sfera S^2 possiedono lo stesso campo CM di endomorfismi $\text{End}_{\text{Hdg}}(T(\mathcal{X}_\zeta))$, e ulteriori proprietà.
- Denotiamo con K_T^0 l'intersezione $K_T \cap \mathbb{R}$. Viene introdotta un'azione del gruppo $K_T^\times / (K_T^0)^\times$ sui punti di Picard jump dell'equatore, provato un omeomorfismo tra tale gruppo e tale insieme (assumendo X di tipo CM), e dedotte ulteriori proprietà.

¹*Département de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay.*

²*Mathematisches Institut der Universität Bonn.*

La tesi è suddivisa in quattro capitoli; in questa sintesi verranno prevalentemente descritti i contenuti del secondo e del terzo.

1. Il primo capitolo contiene risultati classici della letteratura. È presentata un'introduzione alle strutture di Hodge, con particolare enfasi posta sulle strutture di Hodge di tipo K3. I risultati sono accompagnati da numerosi esempi. Sono discusse alcune proprietà di campi di numeri totalmente reali e CM (complex multiplication), e viene richiamato un risultato di Zarhin [Zar83]: il campo di endomorfismi K_T di una struttura di Hodge T polarizzata e irriducibile di tipo K3 è totalmente reale o CM. Infine, il candidato fornisce una dimostrazione alternativa di un risultato di van Geemen [vGe08]: $\dim_{K_T} T \geq 3$ se K_T è totalmente reale.
2. Nel secondo capitolo è esposta parte dell'articolo di Huybrechts [Huy19] (si veda la Sezione 2 di questa Sintesi).
3. Il terzo capitolo contiene i nuovi risultati proposti dal candidato (si veda la Sezione 3 di questa Sintesi).
4. Il quarto capitolo racchiude la traduzione in termini geometrici dei risultati dedotti in termini algebrici.

La tesi è stata discussa dal candidato di fronte al relatore, Professor François Charles, e all'autore dell'articolo, Professor Daniel Huybrechts. Infine, su consiglio del relatore, i risultati originali contenuti nel terzo capitolo saranno oggetto di un articolo che verrà sottoposto per la pubblicazione su rivista.

1 Introduzione e motivazione

Una *superficie K3 complessa* (in seguito abbreviata a *superficie K3*) X è una varietà complessa compatta, connessa, di dimensione 2, avente bundle canonico banale e soddisfacente $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Equivalentemente, queste due proprietà possono essere realizzate richiedendo che X sia semplicemente connessa e dotata di una 2-forma olomorfa mai nulla. Si può dimostrare ([Joy00]) che, data una superficie K3 X , esistono diverse strutture complesse (integrabili) $I_\zeta \in \text{End}(TX)$ sulla stessa varietà differenziabile X ; queste strutture sono parametrizzate da una sfera $\zeta \in S^2 \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$. Per ogni scelta di $\zeta \in S^2 \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$, la varietà complessa (X, I_ζ) è ancora una superficie K3. La struttura complessa originaria su X corrisponde al polo nord della sfera $S^2 \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$.

L'idea sottostante la costruzione del *twistor space* è la seguente: incorporare la famiglia di superfici K3 descritte sopra in un'unica varietà complessa 3-dimensionale. La dimostrazione dell'esistenza di tale varietà è piuttosto tecnica ([HKLR87]). Il twistor space \mathcal{X} di una superficie K3 X è, come varietà differenziabile, niente di più che il prodotto $X \times S^2$, ma la sua struttura complessa è molto più complicata. \mathcal{X} è dotato di un'applicazione olomorfa $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ soddisfacente la seguente proprietà: per ogni $\zeta \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \simeq S^2$, la fibra \mathcal{X}_ζ è la superficie K3 la cui struttura complessa è identificata da ζ , ossia (X, I_ζ) . Per la precisione, questa costruzione non è canonica, e dipende dalla scelta di una classe di Kähler di X (ogni superficie K3 è effettivamente una varietà di Kähler, [Siu83]). Inoltre, la congettura di Calabi dimostrata da Yau in [Yau78] gioca un ruolo essenziale nella costruzione del twistor space.

Una domanda che dunque sorge spontanea è la seguente: **quali proprietà hanno in comune la superficie K3 di partenza X e le fibre \mathcal{X}_ζ del corrispondente twistor space?** Questa è la domanda chiave a cui tenta di rispondere – sotto

ulteriori ipotesi – Huybrechts nel suo articolo [Huy19], e il candidato nel suo lavoro di tesi.

Una prima risposta è data investigando quali delle fibre \mathcal{X}_ζ siano *algebriche*. Esiste un equivalente *schematico* del concetto di superficie K3: una *superficie K3 algebrica complessa* (nel seguito semplicemente *superficie K3 algebrica*) è una varietà algebrica complessa, completa, liscia, di dimensione 2, avente bundle canonico banale e soddisfacente $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Ad una superficie K3 algebrica può essere associata in modo naturale una varietà complessa ([Ser55]) che è, di fatto, una superficie K3. Dunque, diciamo che una superficie K3 è algebrica se è (o è isomorfa a) la varietà complessa associata a qualche superficie K3 algebrica. Huybrechts mette in luce che, supponendo che la superficie K3 X di partenza sia algebrica, solo una quantità numerabile di punti $\zeta \in S^2 \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ dà luogo a fibre \mathcal{X}_ζ algebriche. Per questo motivo, la costruzione del twistor space è pensata come un processo di *natura trascendente*.

Una nota: si può dimostrare ([BHPV04]) che una superficie K3 è algebrica se e solo se è proiettiva. Di conseguenza, non creerà confusione parlare indifferentemente di superfici K3 algebriche o proiettive.

2 L'approccio algebrico: teoria di Hodge del twistor space

Per rispondere alla domanda proposta, ossia analizzare quali proprietà hanno in comune le (o alcune delle) fibre \mathcal{X}_ζ del twistor space \mathcal{X} , risulta conveniente indagare la decomposizione di Hodge del secondo spazio di coomologia $H^2(\mathcal{X}_\zeta, \mathbb{C})$. Infatti, essendo tutte le fibre \mathcal{X}_ζ differomorfe tra loro, il secondo gruppo di coomologia a coefficienti razionali non varia: $H^2(\mathcal{X}_\zeta, \mathbb{Q}) = H^2(X, \mathbb{Q})$. Tuttavia, essendo le fibre non isomorfe tra loro come varietà complesse, è ragionevole supporre che la decomposizione di Hodge dello spazio $H^2(\mathcal{X}_\zeta, \mathbb{C})$ dipenda da ζ – fatto che accade a tutti gli effetti.

Per una superficie K3 X , il \mathbb{Q} -spazio vettoriale $H^2(X, \mathbb{Q})$ ha dimensione 22, ed è dotato di una forma bilineare simmetrica indotta dal cup product. Il Picard number di X , denotato con $\rho(X)$, è la dimensione su \mathbb{Q} del gruppo di Néron-Severi $\text{NS}(X) \subseteq H^2(X, \mathbb{Q})$; questo numero è compreso tra 0 e 20 (se X è proiettiva, tra 1 e 20).

In generale, come fatto notare da Huybrechts, solo una quantità di informazioni relativamente limitata può essere dedotta nel caso in cui non si impongano ulteriori ipotesi su X . Tuttavia, se X è assunta proiettiva, alcune proprietà condivise dalle fibre \mathcal{X}_ζ possono essere messe in luce. Dunque, supporremo d'ora in poi che la superficie K3 di partenza X sia proiettiva.

In questo caso, esiste una classe ℓ nel gruppo di Néron-Severi $\text{NS}(X)$ soddisfacente $(\ell, \ell) > 0$ (la prima classe di Chern di un divisore ampio). Chiamiamo N' il complemento ortogonale (rispetto alla forma indotta dal cup product) di ℓ in $\text{NS}(X)$. Si può dimostrare che la sua dimensione su \mathbb{Q} è $\rho(X) - 1$, e che N' è contenuto in ognuno dei gruppi di Néron-Severi $\text{NS}(\mathcal{X}_\zeta)$ delle fibre del twistor space. Di conseguenza, $\rho(\mathcal{X}_\zeta) \geq \rho(X) - 1$. Diciamo che un punto $\zeta \in S^2 \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ è di *Picard jump* se $\rho(\mathcal{X}_\zeta) \geq \rho(X)$, e che un punto è di *Picard jump eccessivo* se $\rho(\mathcal{X}_\zeta) > \rho(X)$. **Come si distribuiscono i punti di Picard jump sulla sfera S^2 ?**

Prima di fornire una prima risposta a questa domanda, un'osservazione: se \mathcal{X}_ζ è al-

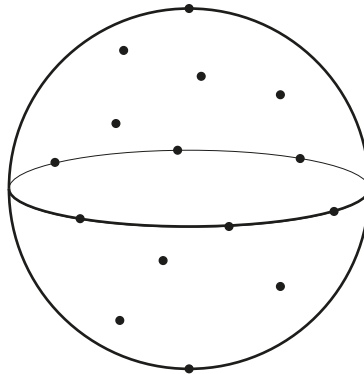
gebrica allora ζ è di Picard jump. Dunque gli interrogativi sollevati sono tra loro collegati.

È Huybrechts, nel suo articolo, a fornire una prima risposta:

Proposizione 2.1. 1. *L'insieme dei punti di Picard jump è numerabile e denso (per la topologia Euclidea) in S^2 .*

2. *I punti di Picard jump eccessivo sono contenuti nell'equatore $S^1 \subseteq S^2$.*

	Valori ammissibili di $\rho(\mathcal{X}_\zeta)$
Al di fuori dell'equatore	$\rho(X) - 1, \rho(X)$
Sull' equatore	$\geq \rho(X) - 1$



L'*equatore* va pensato come l'insieme di punti di S^2 di altezza nulla. Questo risultato verrà successivamente migliorato, si veda la Proposizione 3.1. Si noti che questo risultato assicura che, tranne per una quantità al più numerabile di punti $\zeta \in S^2$, la fibra \mathcal{X}_ζ non è proiettiva.

Per una superficie K3 X proiettiva, il complemento ortogonale di $\text{NS}(X)$ in $H^2(X, \mathbb{Q})$, denotato con $T = T(X)$, detto *transcendental lattice* di X , è una struttura di Hodge di tipo K3 polarizzata e irriducibile. Di conseguenza, l'anello degli endomorfismi di struttura di Hodge di T , $K_T = \text{End}_{\text{Hdg}}(T)$, è in realtà un campo di numeri, o totalmente reale o CM – complex multiplication – (risultato dovuto a Zarhin, [Zar83]). Ricordiamo che: un campo di numeri è detto *totalmente reale* se ogni suo embedding in \mathbb{C} fattorizza attraverso \mathbb{R} ; un campo di numeri è detto *totalmente immaginario* se non ammette embedding reali; un campo di numeri è detto *CM* se è un estensione di grado 2 totalmente immaginaria di un campo di numeri totalmente reale. Se $E \subseteq \mathbb{C}$ è un campo di numeri, denotiamo con $E^0 = E \cap \mathbb{R}$ la sua parte reale.³

Una superficie K3 proiettiva è detta *di tipo CM* se K_T è un campo CM e se – condizione tanto tecnica quanto fondamentale – $\dim_{K_T} T = 1$. Supponendo che la superficie K3 di partenza sia di tipo CM, Huybrechts è stato in grado di dimostrare il seguente risultato:

Teorema 2.2. *Supponiamo che X sia una superficie K3 proiettiva di tipo CM, e sia \mathcal{X} il corrispondente twistor space. Sia $\zeta \in S^2 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ un punto al di fuori dell'equatore $S^1 \subseteq S^2$, tale per cui \mathcal{X}_ζ è algebrica, e sia $T_\zeta = T(\mathcal{X}_\zeta)$ il suo transcendental lattice. Allora \mathcal{X}_ζ è ancora di tipo CM, e i campi di numeri K_T e K_{T_ζ} condividono la stessa parte reale: $K_T^0 = K_{T_\zeta}^0$.*

L'ipotesi di non appartenenza all'equatore $S^1 \subseteq S^2$ di ζ è fondamentale, salvo casi particolari. Huybrechts ha infatti provato che:

Teorema 2.3. *Supponiamo che X sia una superficie K3 proiettiva di tipo CM, e sia \mathcal{X} il corrispondente twistor space. Supponiamo che $\rho(X) < 20$, e sia $\zeta \in S^1 \subseteq S^2 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tale per cui \mathcal{X}_ζ è algebrica. Allora \mathcal{X}_ζ non è di tipo CM.*

³Esiste un embedding naturale di $K_T = \text{End}_{\text{Hdg}}(T)$ in \mathbb{C} , e dunque K_T sarà sempre pensato come sottocampo di \mathbb{C} in queste pagine.

3 Punti di Pircard jump eccessivo e azioni su luoghi di Picard jump: nuovi risultati

In questa sezione sono esposti alcuni dei risultati proposti dal candidato all'interno del suo lavoro di tesi.

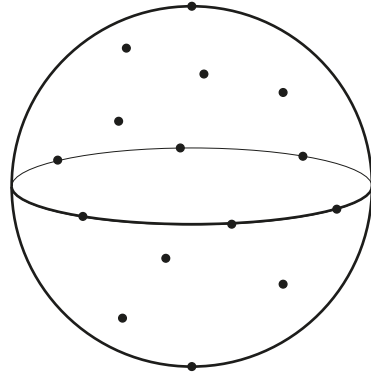
3.1 Picard jump eccessivo

Assumendo che X sia di tipo CM, la Proposizione 2.1 può essere resa più precisa:

Proposizione 3.1. *Supponiamo che X sia di tipo CM, e sia \mathcal{X} il corrispondente twistor space. L'insieme dei punti $\zeta \in S^1 \subseteq S^2$ di Picard jump è denso nell'equatore S^1 . Inoltre, per ciascuno di tali punti, vale*

$$\rho(\mathcal{X}_\zeta) = 10 + \frac{\rho(X)}{2}.$$

	Valori ammissibili di $\rho(\mathcal{X}_\zeta)$, caso CM
Al di fuori dell'equatore	$\rho(X) - 1, \rho(X)$
Sull'equatore	$\rho(X) - 1, 10 + \frac{\rho(X)}{2}$



Si noti come, a eccezion fatta per il caso $\rho(X) = 20$, ogni punto di Picard jump sull'equatore è di Picard jump eccessivo. L'ipotesi di tipo CM gioca un ruolo essenziale in questo risultato; si rimanda alla tesi per due diverse dimostrazioni, e alcuni controesempi nel caso in cui non si supponga X di tipo CM. Inoltre, possono essere comunque date alcune condizioni sui possibili valori assumibili da $\rho(\mathcal{X}_\zeta)$, anche nel caso in cui X non sia di tipo CM.

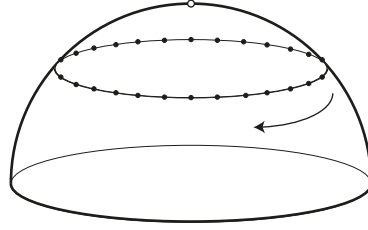
3.2 Azioni su luoghi di Picard jump

Ricordiamo che $K_T = \text{End}_{\text{Hdg}}(T)$ è un campo, e $K_T^\times = K_T \setminus \{0\}$ il suo gruppo moltiplicativo. Per comprendere meglio la distribuzione dei punti di Picard jump sulla sfera, sono state introdotte due diverse azioni di K_T^\times rispettivamente sui punti di Picard jump della semi-sfera superiore e su quelli dell'equatore.

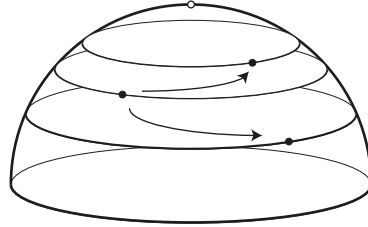
Sia \mathcal{Q} l'insieme dei punti di Picard jump ζ appartenenti alla semi-sfera superiore \mathcal{U} , a eccezione del polo nord, e \mathcal{Q}^+ l'insieme dei punti ζ di \mathcal{U} tali per cui \mathcal{X}_ζ è algebrica, a eccezione del polo nord. Abbiamo già osservato che $\mathcal{Q}^+ \subseteq \mathcal{Q}$. Il gruppo K_T^\times agisce liberamente su \mathcal{Q} ; per la definizione di tale azione si rimanda alla tesi. Se $\zeta \in \mathcal{Q}$ e $A \in K_T^\times$, denotiamo con $A * \zeta$ l'immagine di ζ mediante l'azione indotta da A . Tale azione soddisfa le seguenti proprietà:

Proposizione 3.2. *Sia $\zeta \in \mathcal{Q}$ e $A \in K_T^\times$.*

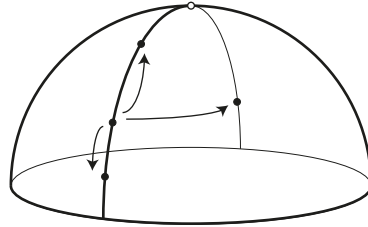
1. *Se $|A| = 1$, allora ζ e $A * \zeta$ hanno la stessa altezza sulla sfera S^2 . Più precisamente, A agisce per rotazione lungo l'asse verticale;*



2. Se $|A| \neq 1$, allora ζ e $A * \zeta$ non sono alla stessa altezza. In particolare, se $|A| < 1$ allora $A * \zeta$ ha altezza maggiore di ζ , e viceversa;



3. Se $A \in K_T^0 = K_T \cap \mathbb{R}$, allora ζ e $A * \zeta$ giacciono sullo stesso meridiano.



Se si assume inoltre che X sia di tipo CM, un risultato più ampio può essere ottenuto:

Corollario 3.3. *Si supponga che X sia di tipo CM.*

1. Il gruppo topologico K_T^\times agisce liberamente, transitivamente e in modo continuo su \mathcal{Q} . Fissato un elemento $\zeta \in \mathcal{Q}$, l'azione induce un omeomorfismo tra K_T^\times e \mathcal{Q} , e questo omeomorfismo induce un omeomorfismo tra \mathbb{C}^\times e \mathcal{U} .
2. Il sottogruppo di K_T^\times dato dagli elementi di norma unitaria agisce su \mathcal{Q} per rotazione lungo l'asse verticale. Tutti i punti di \mathcal{Q} alla stessa altezza di ζ sono ottenuti da ζ agendo con un elemento di norma unitaria. Inoltre, dato un punto $\zeta \in \mathcal{Q}$, esiste una quantità infinita numerabile di punti di \mathcal{Q} alla stessa altezza, e tali punti sono densi nella circonferenza di S^2 a tale altezza. Inoltre, se $\zeta \in \mathcal{Q}^+$, tutti gli altri punti di \mathcal{Q} alla stessa altezza di ζ sono in \mathcal{Q}^+ .
3. Siano $\zeta, \zeta' \in \mathcal{Q}^+$ alla stessa altezza. Sia $T = T(\mathcal{X}_\zeta)$ e $T' = T(\mathcal{X}_{\zeta'})$. Allora \mathcal{X}_ζ e $\mathcal{X}_{\zeta'}$ (di tipo CM per il Teorema 2.2) soddisfano $K_T = K_{T'}$.
4. Infine, \mathcal{Q}^+ è denso in \mathcal{U} .

Si noti come il Teorema 2.2 assicura che soltanto le parti reali di K_T e $K_{T'}$ coincidano: $K_T^0 = K_{T'}^0$; il punto 3 del Corollario 3.3 assicura l'uguaglianza $K_T = K_{T'}$ per punti alla stessa altezza (uguaglianza non verificata, in generale, per punti ad altezze distinte).

Un'azione simile può essere definita anche per punti di Picard jump dell'equatore. Sia \mathcal{R} l'insieme dei punti di Picard jump di $S^1 \subseteq S^2$, modulo la relazione antipodale $\{\pm\}$.⁴

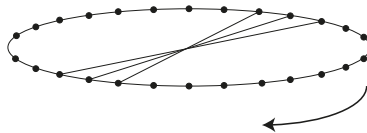
⁴Si rimanda alla tesi per la motivazione che spinge a considerare l'insieme \mathcal{R} con relazione antipodale.

Sia inoltre \mathcal{R}^+ il sottoinsieme dell'equatore dato dagli ζ per cui \mathcal{X}_ζ è algebrica, modulo relazione antipodale. Si ha dunque $\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{R}$.

Il gruppo K_T^\times agisce su \mathcal{R} , ma non liberamente; il nucleo di tale azione è il sottogruppo $(K_T^0)^\times$. Viene dunque indotta un'azione libera del gruppo quoziente $K_T^\times/(K_T^0)^\times$ su \mathcal{R} . Un risultato analogo al caso della semi-sfera superiore può essere ottenuto:

Proposizione 3.4. *Si supponga che X sia di tipo CM.*

1. *Il gruppo topologico $K_T^\times/(K_T^0)^\times$ agisce liberamente, transitivamente e in modo continuo per rotazioni sullo spazio topologico \mathcal{R} . Fissato un elemento $\zeta \in \mathcal{R}$, tale azione induce un omeomorfismo tra $K_T^\times/(K_T^0)^\times$ e \mathcal{R} , e questo omeomorfismo passa ai completamenti topologici, inducendo un omeomorfismo tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ e $S^1/\{\pm\}$.*
2. *\mathcal{R} è denso in $S^1/\{\pm\}$, o equivalentemente: l'insieme di punti di Picard jump dell'equatore è denso (e numerabile) nell'equatore.*
3. *\mathcal{R}^+ è denso (e numerabile) in $S^1/\{\pm\}$.*



3.3 Altri risultati

All'interno della tesi sono proposti anche ulteriori risultati (minori rispetto a quelli esposti fino a questo punto), che vengono qui omessi per non appesantire eccessivamente questa sintesi.

4 Conclusione

In questo lavoro è stato dimostrato che, assumendo che X sia di tipo CM, punti di \mathcal{Q}^+ alla stessa altezza corrispondono a fibre con lo stesso campo CM di endomorfismi associato, e che tali punti sono densi nella circonferenza di S^2 a tale altezza. Tuttavia, si può mostrare con alcuni controesempi che punti ad altezze distinte possono dar luogo allo stesso campo CM. Inoltre, non tutte le estensioni CM di grado 2 del campo totalmente reale $K_T^0 = K_T$ sono realizzate.

Un problema interessante, che pare ben più difficile da attaccare, è il seguente: **che dire a proposito delle strutture intere?** In queste pagine il trascendentale lattice $T = T(X)$ è sempre stato inteso a coefficienti razionali. Tuttavia, si potrebbe considerare $T = T(X)$ a coefficienti interi, come il complemento ortogonale di $\text{NS}(X)$ in $H^2(X, \mathbb{Z})$. In questo modo, definendo $\mathcal{O}_T = \text{End}_{\text{Hdg}, \mathbb{Z}}(T)$, si avrebbe $K_T = \text{End}_{\text{Hdg}, \mathbb{Q}}(T_{\mathbb{Q}}) = \text{End}_{\text{Hdg}, \mathbb{Z}}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathcal{O}_T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, o in altre parole: \mathcal{O}_T è un ordine nel campo di numeri K_T . Nel contesto del twistor space, se $\zeta \in S^2$, le strutture $T_\zeta = T(\mathcal{X}_\zeta)$ possono essere definite a coefficienti interi in modo analogo. Nello stesso spirito del motto “punti alla stessa altezza hanno lo stesso campo CM”, ci si potrebbe domandare: **come si distribuiscono sulla sfera punti ζ tali per cui alle superfici \mathcal{X}_ζ è associato lo stesso ordine \mathcal{O} fissato?** Una discussione più approfondita si trova nella Conclusione della tesi.

Queste domande sono in qualche modo legate a uno dei problemi suggeriti da Charles all'inizio del lavoro di tesi. In [Duk88], Duke ha dimostrato un enunciato circa l'equidistribuzione dei punti CM nello spazio dei moduli delle curve ellittiche complesse. **Un risultato analogo può essere formulato anche per i punti CM del twistor space?**

Bibliografia⁵

- [BHPV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*. Second. Vol. 4. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, 2004, pp. xii+436. ISBN: 3-540-00832-2. DOI: 10.1007/978-3-642-57739-0. URL: <https://doi-org.ezproxy.leidenuniv.nl:2443/10.1007/978-3-642-57739-0>.
- [Duk88] W. Duke. “Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms”. In: *Invent. Math.* 92.1 (1988), pp. 73–90. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/BF01393993. URL: <https://doi-org.ezproxy.leidenuniv.nl:2443/10.1007/BF01393993>.
- [HKLR87] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček. “Hyper-Kähler metrics and supersymmetry”. In: *Comm. Math. Phys.* 108.4 (1987), pp. 535–589. ISSN: 0010-3616. URL: <http://projecteuclid.org.ezproxy.leidenuniv.nl:2048/euclid.cmp/1104116624>.
- [Huy19] Daniel Huybrechts. *Complex multiplication in twistor spaces*. 2019. arXiv: 1910.13788 [math.AG].
- [Joy00] Dominic D. Joyce. *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000, pp. xii+436. ISBN: 0-19-850601-5.
- [Ser55] Jean-Pierre Serre. “Géométrie algébrique et géométrie analytique”. In: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955/56), pp. 1–42. ISSN: 0373-0956. URL: http://aif.cedram.org/item?id=AIF_1955__6__1_0.
- [Siu83] Y. T. Siu. “Every $K3$ surface is Kähler”. In: *Invent. Math.* 73.1 (1983), pp. 139–150. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/BF01393829. URL: <https://doi-org.ezproxy.leidenuniv.nl:2443/10.1007/BF01393829>.
- [vGe08] Bert van Geemen. “Real multiplication on $K3$ surfaces and Kuga-Satake varieties”. In: *Michigan Math. J.* 56.2 (2008), pp. 375–399. ISSN: 0026-2285. DOI: 10.1307/mmj/1224783519. URL: <https://doi-org.ezproxy.leidenuniv.nl:2443/10.1307/mmj/1224783519>.
- [Yau78] Shing Tung Yau. “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I”. In: *Comm. Pure Appl. Math.* 31.3 (1978), pp. 339–411. ISSN: 0010-3640. DOI: 10.1002/cpa.3160310304. URL: <https://doi-org.ezproxy.leidenuniv.nl:2443/10.1002/cpa.3160310304>.
- [Zar83] Yu. G. Zarhin. “Hodge groups of $K3$ surfaces”. In: *J. Reine Angew. Math.* 341 (1983), pp. 193–220. ISSN: 0075-4102. DOI: 10.1515/crll.1983.341.193. URL: <https://doi-org.ezproxy.leidenuniv.nl:2443/10.1515/crll.1983.341.193>.

⁵La bibliografia non è completa: l'elenco qui presente contiene solo i testi citati in questa sintesi.